www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1989
D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE OBLIGATOIRE A OPTION : MATHEMATIQUES (II)

DUREE : 4 heures COEFFICIENT : 6

Les deux problèmes sont indépendants. Certaines questions peuvent être traitées en admettant les résultats des questions précédentes.

Le soin apporté à la rédaction interviendra dans la notation.

PROBLEME I

Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 < p < n$. On supposera $p \geqslant 2$ (sauf à la fin du 8°).

1°) Soit i appartenant à l'intervalle de $\mathbb{N}$ compris entre 1 et n (noté $[1, n]$ dans la suite). On désigne par Fi l'ensemble des injections de $[1, p]$ dans $[1, n] - \{i\}$. Calculer le cardinal de Fi.

2°) Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un n-uplet réel. On définit l'application Ai de Fi dans $\mathbb{R}$ par $Ai(f) = \frac{1}{p} \sum_{j \in [1,p]} x_{f(j)}$. Ai est-elle surjective ? Est-elle injective ?

3°) Combien y-a-t-il d'éléments f de Fi qui vérifient $f(1) = q$ (q étant un entier donné) ?. En déduire que

$$\sum_{f \in Fi} x_{f(1)} = \frac{(n-2)!}{(n-1-p)!} \sum_{q \in [1,n] - \{i\}} x_q$$

4°) Soit G une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$Ei(G) = \frac{1}{\text{card}(Fi)} \sum_{f \in Fi} G(Ai(f)).$$

Montrer que l'application qui à G associe Ei (G) est linéaire. Calculer Ei (G) dans les cas suivants : G (x) = C, où C est une constante, G (x) = x

5°) - a) Combien y-a-t-il d'éléments f de Fi qui vérifient f(1) = q et f (2) = m (q et m étant deux entiers donnés)?.

b) Plus généralement combien y en a-t-il qui vérifient f (j) = q et f(k) = m quand j et k sont donnés dans $[1, p]$?.

c) En déduire une expression de Ei (G) quand $G(x) = x^2$ sous forme d'un polynôme de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

6°) On pose $S = \frac{1}{n} \sum_{q \in [1,n]} x_q$ et $Q = \frac{1}{n} \sum_{q \in [1,n]} x_q^2$

Calculer $\sum_{q \in [1,n] - \{i\}} x_q$, $\sum_{q \in [1,n] - \{i\}} x_q^2$,

$\sum_{\substack{q \in [1,n] - \{i\} \\ m \in [1,n] - \{i,q\}}} x_q x_m$ en fonction de S, Q, x_i et n.

7°) Soit $Gi(x) = (x - x_i)^2$. Exprimer Mi = Ei (Gi) en fonction de S, Q, x_i, n et p.

8°) Calculer $M = \frac{1}{n} \sum_{i \in [1,n]} Mi$ en fonction de S, Q, p et n. Ce résultat reste-t-il valable dans le cas p = 1, n = 2 ?.

TSVP

PROBLEME II

On appellera $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications f croissantes et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ telles que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

1°) Soit F un élément de $\mathcal{C}$ de classe $C^1(\mathbb{R})$, strictement croissante.

Montrer que F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$

2°) Soient G et H deux éléments de $\mathcal{C}$.

On pose $R(G, H) = \int_{-\infty}^{\infty} (G(x) - H(x))^2 F'(x)\, dx$

Justifier l'existence de R (G, H) et montrer qu'il est compris entre 0 et 1.

Si on suppose que G et H sont continues, quand a-t-on R (G, H) = 0 ou R (G, H) = 1 ?.

3°) Soit Y l'élément de $\mathcal{C}$ défini par $Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $Y(x) = 1$ si $x > 0$.

Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un n-uplet réel ordonné.

Exprimer $\left[\sum_{i=1}^{n} Y(x - x_i)\right]^2$ sous forme d'une combinaison linéaire des $Y(x - x_i)$.

4°) Soient $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels vérifiant

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant y \leqslant x_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n$$

On pose $G(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y(x - x_i)$ et $H(x) = Y(x - v)$.

Exprimer R (G, H) en fonction de F (y) et des $F(x_i)$.

5°) On suppose toujours $H(x) = Y(x - y)$, mais on prend G quelconque dans $\mathcal{C}$

Soit $S(y) = R(G, H)$ et $SM = \int_{-\infty}^{\infty} S(y)\, F'(y)\, dy$.

Montrer que SM est compris entre 0 et 1 et qu'il est minimum pour G = F. Calculer dans ce cas S (y) et SM en fonction de F (y).

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail